www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1989 **OPTIONS M et P'**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS

n désigne un entier naturel non nul. On note $E(x)$ la partie entière du réel x.

Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n+1\}$ on note $a_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$. On définit les fonctions u_n, S_n, C_n, V_n et A_n par :

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \qquad V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_k(x)|$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{du_k}{dx}(x)$$

N.B. — Il est demandé aux candidats d'énoncer clairement, lorsqu'ils sont utilisés pour la première fois, les théorèmes concernant les séries de Fourier ainsi que les théorèmes d'intégration ou de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

La clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I

I

1. **Montrer que :**

$$\forall x \in]0, \pi] \quad \frac{dS_n}{dx}(x) = \frac{\sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} .$$

2. ***a.*** **Étudier, sur $]0, \pi]$, les solutions de l'équation : $\sin \frac{n}{2} x = 0$, puis celles de l'équation :**

$$\cos \frac{n+1}{2} x = 0 .$$

b. **Donner sous forme de tableau, le signe de $\frac{dS_n}{dx}(x)$ sur $[0, \pi]$.**

c. **En déduire les points de $[0, \pi]$ où S_n admet un maximum relatif.**

3. ***a.*** **Montrer qu'il existe un entier positif r tel que :**

$$\forall x \in]0, \pi] \quad \frac{dS_n}{dx}(x) = \frac{1}{2} \sin(n+1)x \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) - r \cos^2 \frac{n+1}{2} x .$$

b. **Montrer que :**

$$S_n(a_{2p+1}) - S_n(a_{2p-1}) \leqslant \frac{1}{2} \int_{a_{2p-1}}^{a_{2p+1}} \sin(n+1)x \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \, dx .$$

c. **Quel est le signe de :**

$$\int_{a_{2p-1}}^{\frac{a_{2p+1}+a_{2p-1}}{2}} \sin(n+1)x \left[\operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right] dx \ ?$$

d. **En déduire que $S_n(a_{2p+1}) \leqslant S_n(a_{2p-1})$.**

4. **Déduire de I.3. la valeur de $\sup_{x \in [0, \pi]} S_n(x)$.**

5. ***a.*** **Étudier la convergence de $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$ suivant les valeurs du réel α.**

b. **Montrer, en justifiant avec précision vos affirmations, que :**

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0, \pi]} \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right] = \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta .$$

II

1. Montrer que : $\forall x \in]0, \pi] \quad |A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$.

2. ***a.*** Établir l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \left[A_{n+k}(x)\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right)\right] + \frac{A_{n+p}(x)}{n+p} - \frac{A_n(x)}{n+1} .$$

Tournez la page S.V.P.

b. En déduire que :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in [0, \pi] \quad \forall p \in \mathbb{N}^* : \left| \sum_{k=1}^{p} u_{k+n}(x) \right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

c. Montrer que $\sum_{k \geqslant 1} u_k(x)$ converge pour tout réel x.

3. On pose : $F(x, t) = \sum_{k \geqslant 1} u_k(x)\, t^k$.

a. En remarquant que $\lim_{k \to +\infty} u_k(x) = 0$, montrer que F est définie au moins pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$.

b. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x, t)$.

c. En déduire l'égalité :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[, \quad F(x, t) = (\sin x) \int_0^t \frac{du}{u^2 - 2u \cos x + 1}.$$

4. On suppose que : $(x, t) \in]0, \pi[\times]-1, 1[$.

a. Montrer que l'on peut écrire : $F(x, t) = \text{Arc tg}\,[\varphi(x, t)] + \dfrac{\pi}{2} - x$, où φ désigne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\varphi(x, 1)$ s'exprime simplement en fonction de $\text{tg}\,\dfrac{x}{2}$.

c. En déduire que : $\forall x \in]0, \pi[\quad \lim_{t \to 1^-} F(x, t) = \dfrac{1}{2}(\pi - x)$,

puis calculer : $\dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx$.

d. Enfin pour tout x réel calculer la somme de la série : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$.

III

1. Montrer que : $\forall x \in [0, \pi] \quad A_n(x) + \sin \dfrac{(n+1)}{2} x \geqslant 0$.

2. *a.* Étudier les solutions de l'équation : $\dfrac{dC_n}{dx}(x) = 0$ sur $[0, \pi]$.

b. Donner sous forme de tableau le signe de $\dfrac{dC_n}{dx}(x)$ sur $[0, \pi]$, puis en déduire les points de $[0, \pi]$ où C_n admet un minimum relatif.

c. Soient p et q deux entiers naturels. En utilisant III.1., prouver que :

$$0 \leqslant p < q \leqslant \frac{n+1}{2} \Rightarrow C_n(a_{2p}) - C_n(a_{2q}) \geqslant 0.$$

d. En déduire que si $s = E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ on a : $\min_{x \in [0, \pi]} C_n(x) = C_n(a_{2s})$.

3. En distinguant les cas n pair et n impair, prouver que :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad C_n(x) \geqslant -1.$$

[Remarquer que pour n impair $\geqslant 5$ $\quad C_n(x) \geqslant -1 + \dfrac{13}{60} > -1 + \dfrac{1}{n}$.]

IV

1. Montrer que :

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = K\left[1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}\right].$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad |\sin x| = 4K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}.$$

3. Établir que : $\sup_{x \in [0, \pi]} V_n(x) \geqslant \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_n(\theta)\, d\theta$

puis calculer : $\int_0^{\pi} |\sin kx|\, dx$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

4. En utilisant IV.2. et 3. montrer, à l'aide de III.3., que :

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sup V_n(x) \leqslant \frac{2}{\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right].$$

5. En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0, \pi]} \sum_{k=1}^{n} |u_k(x)| = +\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail